TD0 : Formules de Taylor

$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$

L'idée d'approximer une fonction par un polynôme est très ancienne en analyse. Le but évident est d'appréhender un objet «compliqué» (la fonction) par un objet plus simple (un polynôme). Dans ce T.D. on pose la question suivante : Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. Comment approximer f par un polyôme p de degré n qui vérifie $p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$? (un tel polynôme est dit osculatoire)

Plus précisemment on va décomposer cette question en plusieurs étapes :

- Peut-on toujours trouver un tel polynôme ?
- Est-il unique ?
- Comment le calculer ?
- Est-ce que ce polynôme est une bonne approximation de f ?

Exercice 1. On considère la fonction $x \to \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$. Trouver un polynôme p de degré trois qui vérifie $p(0) = \exp(0)$, $p'(0) = \exp'(0)$, $p''(0) = \exp''(0)$ et $p^{(3)}(0) = \exp^{(3)}(0)$.

Cas général : soit f une fonction n fois dérivable en x_0 et p un polynôme de degré n. Ecrire le système qui traduit les égalités $p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$. Ce système est-il inversible ?

Exercice 2. Montrer que l'exerice précédent permet de répondre à la question.

Exercice 3. Oublier l' exercice précédent ! Nous allons démontrer autrement l'unicité du polynôme osculatoire.

1. Montrer que si $p(x_0) = p'(x_0) = \cdots = p^{(k)}(x_0) = 0$ alors $(x - x_0)^{k+1} \mid p$ (on dit que x_0 est une racine d'ordre $k+1$ de p).
2. Supposons que p_1 et p_2 soient deux polynômes osculatoires de degré n pour la fonction f en x_0. Montrer que x_0 est une racine d'ordre $n+1$ de $p_1 - p_2$.
3. Conclure.

Definition 1. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ si f est n fois dérivable sur $[a,b]$ et si $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$.

Théorème 1. [Formule de Taylor-Lagrange] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors

$$\exists c \in]a,b[, f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}$$

La formule de Taylor-Lagrange admet une version *locale* avec le théorème suivant :

Théorème 2. [Formule de Taylor-Young] Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur I et $a \in I$ avec $f^{(n)}(a)$ existe. Alors pour tout x dans un voisinage de a on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Exercice 4. Vérifier que la partie principale du développement de Taylor satisfait les équations du système linéaire précédent.

Lorsqu'on utilise un polynôme pour approximer une fonction il est indispensable de se poser la question de l'erreur.

Exercice 5. Estimer le degré du polynôme de Taylor relatif à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ en 0 qui garantit une approximation correcte à trois décimales pour $0 < x < 1$.

Exercice 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en $a \in I$. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Rappeler l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(a, f(a))$.
2. Montrer par la formule de Taylor Young que $\mathscr{C}_f$ est localement au-dessus de la tangente en $(a, f(a))$ lorsque $f''(a) > 0$. Que se passe-t-il si $f''(a) < 0$?
3. Que peut-on dire de la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente en $(a, f(a))$ lorsque $f''(a) = 0$.

TD 1 : Interpolation

Objectifs du TD :

- Comprendre l'objet «polynôme d'interpolation» (existence, unicité).
- Savoir le calculer (Forme de Lagrange, forme de Newton)
- Se poser la question de l'erreur.

Exercise 1.
1. Question de cours : définir le polynôme d'interpolation pour une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ pour un support à $n+1$ points. Comment montre-t-on l'unicité du polynôme d'interpolation ?
2. Application : Soient $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $g : x \mapsto \sin(\frac{\pi}{2}(x-1))$ définies sur $[1,2]$. Montrer que ces deux fonctions ont le même polynôme d'interpolation pour le support $\{1, 1.5, 2\}$.

Exercise 2. On considère $n+1$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ d'un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Soit $(l_i)_{0\le i\le n}$ la famille des polynômes de Lagranges associés au support $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

1. Montrer que pour tout i de $\{0, \ldots, n\}$ la fonction l_i est de degré n et vérifie
$$\forall (i,k) \in \{0, \ldots, n\}^2, l_i(x_k) = \delta_{i,k}$$
où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker.
2. Montrer que la famille des Lagrange $(l_i)_{0\le i\le n}$ constitue une base de $\mathscr{P}_n$.
3. Pour tout (i,k) de $\{0, \ldots, n\}^2$ déterminer $l_i'(x_k)$. Simplifier l'écriture lorsque $i = k$.

Exercise 3. On donne trois valeurs d'une fonction K définie sur $[1,6]$

$$K(1) = 1.5709, \quad K(4) = 1.5727, \quad K(6) = 1.5751$$

1. En utilisant les polynômes de Lagrange relatifs au support $\{1, 4\}$, fournir une valeur approchée de $K(3.5)$ grâce au polynôme d'interpolation de K de degré un.
2. En utilisant les polynômes de Lagrange relatifs au support $\{1, 4, 6\}$, fournir une valeur approchée de $K(3.5)$ grâce au polynôme d'interpolation de K de degré deux.
3. Traiter de nouveau ces deux questions en utilisant la forme de Newton.
4. Comparer les deux méthodes et conclure.

Exercise 4. Montrer que les différences divisées sont symétriques.

Exercise 5. [Une expression théorique des différences divisées]

1. Avec les notations habituelles, démontrer l'égalité suivante donnant une autre expression des différences divisées :
$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \quad f[x_0, x_1, ..., x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)}. \tag{1}$$
On pourra utiliser la décomposition du polynôme p_k sur la base des polynômes de Lagrange.
2. Grâce à (1) retrouver les expressions de $f[x_0]$ et de $f[x_0, x_1]$.
3. Comparer la complexité de la formule (1) pour calculer les différences divisées $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, ..., $f[x_0, ..., x_n]$ par rapport à l'algorithme pyramidal. Conclure.

Exercise 6. [Extension de la notion de différence divisée]
On considère une fonction numérique f de la variable réelle définie sur l'intervalle $I = [A, B]$ de $\mathbb{R}$. Soit a, b, c trois points distincts de I.

1. On définit la fonction F par $F(x) = f[a, x]$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de F. Trouver une hypothèse (H_1) portant sur f suffisante pour que F soit prolongeable par continuité en a.
   (b) Sous (H_1), calculer la limite de F en a ; inventer une notation pour représenter cette limite.
   (c) Quelle proposition vient-on d'établir concernant les différences divisées ? En déduire que l'on vient de donner un sens à une différence divisée dont les arguments ne sont pas distincts.

$$f[x_0,\dots,x_n]=\frac{f[x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n]}{x_j-x_i}$$

$$f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,x_1,\dots,x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

2. On définit la fonction G par $G(x)=f[a,x,c]$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de G.
   (b) Trouver une hypothèse (H_2) portant sur f suffisante pour que G soit prolongeable par continuité en a et c.
   (c) Sous (H_2), calculer les limites de G en a et c ; inventer une notation pour représenter ces limites.
   (d) Vérifier que le sens donné aux nouvelles notations respecte la propriété fondamentale permettant le calcul des «différences divisées classiques».
3. Sous (H_2) , on considère la fonction H définie par $H(x)=f[a,a,x]$. Adapter les questions de la question antérieure pour généraliser la démarche proposée.
4. Que conjecturer pour prolonger les questions antérieures ?
5. En utilisant ces nouvelles notations comment pouvez-vous écrire le polynôme osculatoire de degré n en x_0 à f (vous ferez les hypothèses nécessaires sur f) en termes de différences divisées ?
6. Quelle généralisation de la théorie des polynômes d'interpolation proposeriez-vous ?

Exercise 7. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue que l'on souhaite interpoler.

1. Rappeler les formules vues en cours pour le calcul de l'erreur.
2. En faisant des hypothèses supplémentaires de régularité sur f déterminer une majoration du nombre de points de support nécessaires pour que l'erreur d'interpolation en tout point $x\in[a,b]$ soit inférieure à ϵ, où ϵ est un réel strictement positif.

Exercise 8. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^3 sur l'intervalle $I=[a,b]$. Pour tout i appartenant à $\{0,\dots,n\}$, on pose $x_i=a+ih$ où $h=(b-a)/n$.

1. Soient $i\in\{0,\dots,n-1\}$ et $p_{i,1}$ le polynôme d'interpolation de degré un de f en x_i et x_{i+1}
   Exprimer l'erreur d'interpolation $e_{i,1}(x)=f(x)-p_{i,1}(x)$ pour un élément x de $[x_i,x_{i+1}]$ et majorer sa valeur absolue indépendamment de i.
2. On considère une table à pas constant h_1 et on interpole linéairement f entre les nœuds. Soit $\varepsilon>0$. Déduire de la question précédente une majoration du pas h_1 garantissant une précision inférieure à ε.
3. Soient $n\geq 2$, $i\in\{0,\dots,n-2\}$ et $p_{i,2}$ le polynôme d'interpolation de degré deux de f en x_i, x_{i+1} et x_{i+2}
   Exprimer l'erreur d'interpolation $e_{i,2}(x)=f(x)-p_{i,2}(x)$ pour un élément x de $[x_i,x_{i+2}]$ et majorer sa valeur absolue indépendamment de i.
4. On considère une table à pas constant h_2 et on interpole de façon quadratique f entre les nœuds. Soit $\varepsilon>0$. Déduire de la question précédente une majoration du pas h_2 garantissant une précision inférieure à ε.
5. Application numérique : on donne $\varepsilon\in\{10^{-2},10^{-4}\}$, $a=1$, $b=3$ et $f(x)=\sqrt{x}$. Calculer h_1 et h_2. Même calcul pour $f(x)=e^x$.

Algorithme de Casteljau

$B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{k-i}t^i$

$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i$

Objectifs du TD :

- Savoir tracer une courbe de Bézier à partir du polygone de contrôle.
- Comprendre les liens entre les propriétés des polynômes de Berstein, les propriétés géométriques de la courbe et le polygone de contrôle.
- Comprendre l'algorithme de de Casteljau.

Exercise 1. — Calculer les polynômes de Bernstein de degré 5.
— Montrer que les polynômes de Berstein B_i^n forment une base pour l'espace vectoriel $\mathscr{P}_n$.

Exercise 2. On considère dans le plan rapporté au repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ le polygone de contrôle suivant : $\mathbf{P} = (\mathbf{P_0},\mathbf{P_1},\mathbf{P_2},\mathbf{P_3},\mathbf{P_4})$ avec $P_0 = (4,4), P_1 = (0,-10), P_2 = (0,14), P_3 = (4,0)$.

1. Calculer avec l'algorithme de de Casteljau les coordonées du point de la courbe de Bézier associée pour $t = 1/2$.
2. Établir les équations paramétriques de la courbe de Bézier définie par **P**.
3. Faire l'étude de la courbe et la tracer.
4. Vérifier sur l'exemple que la tangente au temps $t = 0$ correspond à la droite (P_0P_1) et la tangente en $t = 1$ à la droite (P_2P_3). Généraliser.

Exercise 3. Étudier et tracer la courbe de Bézier de points de contrôle $P_0(0,0), P_1(-5,10), P_2(5,10), P_3(0,0)$. Déterminer l'image de cette courbe par une similitude de centre $(0,0)$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$?

Exercise 4. On rappelle qu'une courbe paramétrée γ admet un point cusp pour le paramètre t_0 lorsque $\gamma'(t_0) = 0, \gamma''(t_0) \neq 0$ et $\gamma'''(t_0) \neq 0$.

1. Montrer que si γ est une courbe de Bézier cubique, alors γ' est une parabole passant par $(0,0)$ en t_0.
2. Construire une telle parabole et en déduire un polygone de contrôle qui produit une courbe de Bézier cubique avec un point cusp.

Exercise 5. 1. Déterminer la complexité de l'algorithme de De Casteljau pour évaluer $\gamma(t_0)$.

2. Comparer ce résultat à lévalutation de $\gamma(t_0)$ en utilisant le schéma de Horner. Quel peut-être l'intérêt(s) de l'algorithme de De Casteljau ?

Exercise 6. [médian 2009]

1. On considère g la courbe de Bézier cubique de polygone de contrôle $Q = (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3)$ où $Q_0 = (-1,-1), Q_1 = (2,a), Q_2 = (-2,a), Q_3 = (1,-1)$.
   (a) Établir les équations paramétriques de la courbe g.
   (b) Étudier les variations de g
   (c) Montrer que pour $a = \frac{4}{3}$ la courbe admet un point double en $(0,0)$ (i.e. il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $g(t_1) = g(t_2) = (0,0)$). On calculera pour cela les valeurs exactes t_1 et t_2.
   (d) Tracer précisement la courbe g pour $a = \frac{4}{3}$.
2. On souhaite construire une courbe de Bézier γ de degré 4 possédant deux points de rebroussement (point cusp). On rappelle qu'une condition suffisante pour avoir un tel point en t_0 est $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{0}$ et $\gamma''(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.
   (a) Rappeler comment on associe à γ la courbe de Bézier g de degré 3 correspondant à γ' (à une homothetie près).
   (b) Si on suppose que γ admet deux points cusp que peut-on dire de g ?
   (c) Construire le polygone de contrôle $P = (P_0,P_1,P_2,P_3,P_4)$ de γ.
   (d) Sans calculer les équations de la courbe γ positionner les points cusps de γ et esquisser la courbe à partir du polygone de contrôle (on prendra une échelle suffisament grande, 1 unité=5cm, on pourra prendre comme valeur approchée de t_1 et t_2, $t_1 \approx \frac{1}{5}$ et $t_2 \approx \frac{4}{5}$ enfin on laissera les traits de construction apparents).
3. Peut-on construire une courbe de Bézier de degré 4 avec plus de deux points cusps ?

TD 3 : Courbes B-splines

Algorithme de Boor-Cox

$$B_{i,k}(t) = \omega_{i,k}(t)B_{i,k-1}(t) + (1-\omega_{i+1,k}(t))B_{i+1,k-1}(t)$$

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}(t)P_i$$

Objectifs du TD :

- Comprendre la définition et savoir calculer les fonctions B-splines.
- Comprendre la définition d'une courbe B-spline et comment les propriétés de ces courbes se traduisent géométriquement.
- Mettre en perspective les courbes de Bézier et les courbes B-splines.

Exercise 1. Soit le vecteur noeud suivant $\tau = (0,1,2,3,4)$.

1. (a) Déterminer les fonctions B-spline $B_{i,2}$.
   (b) Étudier et représenter graphiquement ces fonctions.
   (c) Vérifier sur cet exemple les propriétés de fonctions B-splines.
2. Même question pour le noeud $\tau = (0,1,2,2,3,4)$ et les fonctions $B_{i,2}$.

Exercise 2. On considère $k \in \mathbb{N}$ et on pose $[a,b] = [0,1]$. On considère alors les B-splines, $B_{i,k}$ définie pour les noeuds $t_0 = t_1 = \cdots = t_k = 0$ et $t_{k+1} = t_{k+2} = \cdots = t_{2k+1} = 1$.

1. Fournir la relation de récurrence liant $B_{i,k}$ à $B_{i,k-1}$ et $B_{i+1,k-1}$ et montrer qu'on retrouve ainsi les polynômes de Bernstein.
2. Énoncer les propriétés vérfiées par les B-splines et retrouver ainsi les propriétés des polynômes de Bernstein.

Exercise 3. Montrer la propriété dîte de partition de l'unité des B-splines.

Exercise 4. Le but de l'exercice est de montrer que les courbes B-splines de degré 2 définie par un polygone de contrôle $P = (P_0,\dots,P_n)$ et un vecteur noeud $t_0 = t_1 = t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t_{n+1} = t_{n+2}$, sont tangentes aux côtés du polygone de contrôle.

1. Montrer que $\gamma_2(t_{i+1})$ est dans l'enveloppe convexe formée par P_{i-1} et P_i.
2. Calculer $\gamma_2'(t_{i+1})$. Conclure.

Exercise 5. [Final 2009] On considère le polygône de contrôle $\mathbf{P} = (P_0,P_1,P_2,P_3)$ avec $P_0 = (0,1)$, $P_1 = (2,3)$, $P_2 = (4,1)$ et $P_4 = (6,3)$ et un vecteur noeud $\tau = (t_0,\dots,t_6)$ tel que $0 \le t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_6 \le 1$. On notera γ_2 la courbe B-splines de degré deux associée au vecteur noeud τ et au polygone de contrôle $\mathbf{P}$.

1. Combien de fonctions B-splines de degré 2 génère-t-on avec le vecteur noeud τ ?
2. Proposer un choix de noeuds possibles pour que γ_2 soit vissée aux extrémités.
3. Soit $t \in [t_3,t_4[$.
   (a) Évaluer $\gamma_2(t)$ en utilisant l'algorithme de Cox-De Boor et obtenir une expression en fonction des coeffcients $\omega_{3,1}(t),\omega_{3,2}(t),\omega_{2,2}(t)$ et des points P_1,P_2,P_3 (on pourra présenter les calculs en mettant en évidence l'aspect triangulaire de l'algorithme).
   (b) En déduire que si $t = t_3$ alors $\gamma_2(t_3) = (1-\omega_{2,2}(t_3))P_1 + \omega_{2,2}(t)P_2$.
   (c) Montrer alors que $\gamma_2(t_3)$ est le milieu du segment $[P_1,P_2]$ si et seulement si t_3 est le milieu de $[t_2,t_4]$.
4. En utilisant ce qui précède et les propriétés de tangence des courbes B-splines de degré 2, tracer la courbe $t \to \gamma_2(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ pour le noeud $\tau = (0,0,0,\frac{1}{2},1,1,1)$.
5. On considère maintenant un polygone de contrôle à $n+1$ points, $\mathbf{P} = (P_0,\dots,P_n)$. Comment doit-on choisir le vecteur noeud pour que la courbe B-splines de degré 2 soit vissée aux extrémités et passe par les points milieux des côtés du polygone de contrôle $[P_i,P_{i+1}]$ pour $i = 1,\dots,n-2$?
6. Interpolation : on souhaite construire une courbe B-spline de degré 2 vissée aux extrémités qui interpole une famille de n points $\{(x_i,y_i), 0 \le i \le n-1\}$. On choisira comme noeuds $t_0 = t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = \frac{1}{n-1}$, $t_4 = \frac{2}{n-1},\dots,t_n = \frac{n-2}{n-1}, t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3} = 1$
   (a) Montrer que nous n'avons pas de choix pour les points de contrôle P_0 et P_n.
   (b) On suppose P_1 choisi. Comment faut-il choisir P_2 ?

(c) Conclure qu'il existe une courbe B-spline de degré deux qui interpole les points (x_i, y_i) ? Quels choix a-t-on pour les tangentes aux extrémités ? Comparer avec le résultat vu en cours sur les interpolations par B-splines de degré 3.

(d) Application : construire un polygone de contrôle et un vecteur noeud qui génère une courbe B-splines de degré 2 passant par les points

$$\{(1,0),(2,3),(4,1),(3,-1),(2,0)\}$$

Tracer la courbe et son polygone de contrôle.

TD 4 : Intégration

Objectifs du TD :

- Savoir mettre en place une formule de quadrature pour l'intégration numérique par les méthodes classiques (comprendre le lien avec l'interpolation).
- Se poser la question de l'erreur.
- Comprendre la différence de qualité entre ces méthodes.

Exercise 1. 1. Appliquer la méthode de votre choix pour fournir une approximation numérique de

$$I = \int_0^2 \sqrt{x}dx \tag{1}$$

2. Déterminer une borne supérieure théorique pour l'erreur commise.
3. Comparer avec la valeur exacte de I.

Exercise 2. Soit f une fonction numérique de classe C^4 sur $[a,b]$. On considère un pas constant d'intégration h pour f sur $[a,b]$ et on note x_0, x_1, ..., x_N la suite associée à la subdivision de $[a,b]$. On se propose de calculer, à ε près ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* s$), l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

1. Déterminer le pas maximal h_{max} autorisé en méthode des rectangles, du point milieu, des trapèzes et de Simpson pour que la valeur absolue de l'erreur d'intégration commise soit majorée par ε.

   En déduire le nombre de sous-intervalles à considérer pour chacune des méthodes citées, afin d'évaluer I.
2. Application numérique : on donne

   $$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = \sqrt{x}, a = 1, \quad b = 3, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

   Interpréter les résultats obtenus.
3. Fournir un algorithme $integ(f,a,b,\epsilon \to val)$ qui fourni à partir de la donnée de f,a,b une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ à ϵ près.

Exercise 3. On se propose de calculer numériquement avec précision de ϵ ($\epsilon > 0$) une valeur approchée de $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1. Montrer que la fonction f à intégrer est $\mathscr{C}^4$ et de dérivée quatrième bornée sur $[0,+\infty[$.
2. En majorant f par des fonctions d'intégrales exprimables par des primitives, montrer que l'intégrale considérée est convergente et en déduire un réel $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{\epsilon}{2}$.
3. Déterminer le pas constant h permettant par la méthode de Simpson, de fournir une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^A e^{-x^2} dx$ à $\frac{\epsilon}{2}$ près.
4. Bilan ?

Exercise 4. Déterminer les fonctions polynômes pour lesquelles la relation de Simpson fournit une valeur exacte de l'intégrale.

Exercise 5. *Construire sa proppre méhode d'intégration*. Les rêgles d'intégration vues en cours étaient toutes construites à partir d'une interpolation sur des supports de points distincts. Que se passe-t-il si on considère des méthodes de quadratures construites à partir de support de points non disctincts ?

On considère $f \in \mathscr{C}^2([a,b])$ et on veut estimer

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

1. Donner l'expression théorique du polynôme d'interpolation p_1 de f pour le support $\{a,a\}$.
2. Déterminer une formule d'intégration.
3. Expliquer à partir d'un dessin l'indée de la méthode.
4. Montrer que l'erreur de méthode s'exprime sous la forme :

   $$E = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\zeta) \text{ avec } \zeta \in]a,b[\tag{3}$$

5. Proposer une formule d'intégration pour une verion composéee de la méthode et déterminer la formule de l'erreur correspondante.

1 Définitions

Definition 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire $<,>$: $E \times E \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire, symétrique et définie positive.

Definition 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On définit la norme euclidienne (ou norme associée au produit scalaire) d'un vecteur $v \in E$ par :

$$||v|| = \sqrt{< v, v >}.$$

Remark 1. On peut définir différents types de norme sur un même espace. En particulier il n'est pas nécessaire d'avoir un produit scalaire pour définir une norme.

Exercise 1. On rappelle que sur $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est défini par

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

1. Vérifier rapidement qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. La base $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ est-elle orthonormée ?

Proposition 1. Sur $\mathscr{P}$, le crochet $<,>$ défini par

$$< u, v >= \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx \forall (u, v) \in \mathscr{P}^2$$

est un produit scalaire.

Exercise 2. Prouver la proposition 1. Montrer que $\{x, 1+x^2\}$ sont orthongonaux pour $<,>$. Calculer la norme de ces deux vecteurs.

Exercise 3. On rappelle que $\mathscr{P}_n$ représente l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Déterminer les vecteurs p_1 de $\mathscr{P}_1$ orthogonaux à $p_0 = 1$. Puis le sous-espace des vecteurs de $\mathscr{P}_2$ orthogonaux à p_0 et p_1.

2 Procédé de Gram-Schmidt

Étant donné E, espace vectoriel muni d'un produit scalaire, peut-on construire une base orthogonale ?

Soient u et v deux vecteurs non nuls de E, la projection de u sur v est donnée par

$$proj(u)_v = \frac{< u, v >}{< v, v >} v$$

Si u et v sont libres on construit deux vecteurs orthogonaux de la manière suivante :

$$v_1 = v \text{ et } v_2 = u - proj_{v_1}(u). \textbf{ (faire un dessin !)}$$

Ce procédé se généralise à n vecteurs libres. On choisit un vecteur v_1 puis on construit v_2 par soustraction de la compostante du second vecteur sur v_1. Une fois v_2 construit on choisit un troisième vecteur qu'on «orthogonalise» en enlevant les composantes sur v_1 et v_2, etc...

Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille libre de E,

$$\begin{gathered} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 - proj_{v_1}(u_2) \\ v_3 = u_3 - proj_{v_1}(u_3) - proj_{v_2}(u_3)0 \\ \vdots \\ v_n = u_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} proj_{v_i}(u_n) \end{gathered}$$

Exercise 4. Construire «à la main» les quatre premiers vecteurs d'une famille de polynômes $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tels que :

1. $deg(L_i) = i$.
2. $L_i(1) = 1$.
3. $< L_i, L_j >= 0$ pour $i \neq j$.

On partira de la base canonique que l'on «redressera».

TD 5 : Intégration gaussienne

$W_i = \int_a^b \int \Pi_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\omega(x)dx$

$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{i=0}^n W_i f(x_i)$

Objectifs du TD :

- Savoir mettre en place une méthode d'intégration gaussienne.
- Comprendre la notion de méthode d'ordre optimal.
- Comprendre comment se construit l'intégration Gaussienne.

Exercise 1. [Vers l'intégration de Legendre]
On considère une fonction f, continue sur $[-1,1]$ et on pose

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

On étudie dans cet exercice la formule de quadrature à deux points :

$$K(f) = W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1), \tag{1}$$

où x_0 et x_1 sont deux réels distincts de $]-1,1[$ et W_0 et W_1 sont deux réels quelconques.

1. En remarquant que le polynôme $\psi_1 = (X-x_0)(X-x_1)$ n'est pas de signe constant, on impose, comme dans le cours, la condition

$$\int_{-1}^{1} (x-x_0)(x-x_1)dx = 0. \tag{2}$$

   (a) Quelle condition sur x_0 et x_1 fournit cette égalité ? Permet-elle de déterminer complètement x_0 et x_1 ? Les réels $x_0 = -1/2$ et $x_1 = 2/3$ vérifient-ils (2) ?

   (b) Sur le support $\{x_0, x_1\}$, on interpole f par un polynôme de degré un et on considère $K(f)$ défini par (1). Pour f élément de $\mathscr{P}_3$, calculer $I(f)-K(f)$. En déduire que $I(f)-K(f)$ est nul si et seulement si f appartient à $\mathscr{P}_2$.

2. On impose , comme dans le cours, la condition supplémentaire

$$\int_{-1}^{1} (x-x_0)^2(x-x_1)dx = 0. \tag{3}$$

   (a) Quelle condition supplémentaire sur x_0 et x_1 fournit cette égalité ? Déterminer alors x_0 et x_1.

   (b) Vérifier que $I(f)-K(f)$ est nul si f appartient à $\mathscr{P}_3$.

3. Peut-on espérer élever encore le degré des polynômes pour lesquels la formule de quadrature (1) donne la valeur exacte de l'intégrale ?

Exercise 2.

1. En utilisant les tables numériques (voir compléments en ligne), évaluer numériquement l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2},$$

   par la méthode de Gauss-Legendre à $n+1$ points avec $n \in \{0,\dots,5\}$.

2. Calculer la valeur exacte de I.
3. Comparer avec les valeurs approchées. Conclure.

Exercise 3. On considère l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1. Calculer I. (on pourra utiliser le résultat suivant $\cos(x)^4 = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$, connaissez-vous un moyen de retouver ce résultat ?)
2. Intégrer I numériquement par la méthode de Tchebychev sur un support à trois points.
3. Comparer le résultat avec votre calcul de la question **1**. Expliquer.
4. De combien de points a-t-on besoin pour évaluer de manière exacte $\int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx$?

Exercise 4. Soit f une fonction continue sur $[-1,1]$, on pose

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

On considère une méthode d'intégration numérique à $n+1$ points :

$$I^{num}(f) = W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) + \cdots + W_n f(x_n)$$

où $x_0, \dots, x_n$ sont $n+1$ réels de $]-1,1[$ et $W_0, \dots, W_n$ sont les poids associés (on rappelle que les poids W_i sont calculés par $W_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$

$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{i=0}^n W_i f(x_i)$

$W_i = \int_a^b \int \Pi_{j=0,j\neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\omega(x)dx$

où l_i est le i-ème polynôme de Lagrange).

On notera $\mathscr{P}_k$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k.

On dira qu'une méthode d'intégration numérique est *d'ordre k* si elle est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à k c'est à dire

$$\forall P \in \mathscr{P}_k, I(P) = I^{num}(P)$$

1. Dans cette question on montre que l'ordre de la méthode est inférieur ou égal à $2n+1$:
   (a) Soit $P = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$. Montrer que $I^{num}(P^2) = 0$. En déduire que $I(P^2) \neq I^{num}(P^2)$.
   (b) Conclure qu'il n'existe pas de méthode numérique à $n+1$ points d'ordre $2n+2$.
2. Dans cette question on montre que la méthode est d'ordre n :
   (a) Soit P un polynôme de degré n. Rappeler son écriture dans la base de Lagrange pour le support $\{x_0,\dots,x_n\}$ (on pourra noter l_i le i-ème polynôme de Lagrange).
   (b) Montrer que $I(P) = I^{num}(P)$. Conclure que la méthode est d'ordre n.
3. Dans cette question on suppose que $x_0,\dots,x_n$ sont les racines du $n+1$-ème polynôme de Legendre L_{n+1}. Soit $P \in \mathscr{P}_{2n+1}$, on écrit la division euclidienne de P par L_{n+1} : il existe deux polynômes Q et R tels que $P(x) = Q(x)L_{n+1}(x) + R(x)$ avec $deg(R) < n+1$.
   (a) Montrer que $I^{num}(P) = I^{num}(R)$.
   (b) Quel est le degré maximum de Q ? Utiliser une propriété des polynômes de Legendre pour montrer (sans calculs) que $\int_{-1}^1 Q(x)L_{n+1}(x)dx = 0$. En déduire $\int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 R(x)dx$.
   (c) Pourquoi a-t-on $I(R) = I^{num}(R)$?
   (d) Conclure que la méthode est d'ordre $2n+1$, i.e $I(P) = I^{num}(P)$ pour tout $P \in \mathscr{P}_{2n+1}$.
4. Réciproquement, montrer que si la méthode est d'ordre $2n+1$ alors les noeuds $x_0,\dots,x_n$ sont les racines du $n+1$-ème polynôme de Legendre.

Exercise 5. Intégration de Gauss-Martin]

Dans cet exercice on se propose de créer une méthode d'intégration originale.

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on cherche à évaluer de manière optimale :

$$\int_0^1 f(x)\underbrace{(-\ln(x))}_{\omega(x)}dx \tag{4}$$

Pour éviter les déboires calculatoires on donne le résultat suivant valable pour tout $\alpha \geq 0$ (utilisable quand vous le souhaitez dans l'exercice) :

$$\int_0^1 x^\alpha(-\ln(x))dx = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \tag{5}$$

On considère sur l'espace vectoriel des fonctions polynômes $\mathscr{P}$ le crochet suivant

$$\begin{array}{rccc} \langle,\rangle : & \mathscr{P}\times\mathscr{P} & \to & \mathbb{R} \\ & (p,q) & \mapsto & \langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)(-\ln(x))dx \end{array} \tag{6}$$

1. Montrer que $\langle,\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{P}$.
2. Montrer que pour tout $p,q \in \mathbb{N}$ on a $\langle x^p, x^q\rangle = \frac{1}{(p+q+1)^2}$.
3. On considère le polynôme M_2 de degré 2 donné par $M_2(x) = x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{17}{252}$.
   (a) Vérifier que $\langle M_2, 1\rangle = 0$ et $\langle M_2, x\rangle = 0$.
   (b) En déduire que $M_2 \perp \mathscr{P}_1$ (c'est-à-dire M_2 est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à 1).
4. Expliquer pourquoi si on souhaite construire une méthode à deux points pour évaluer numériquement (4), il serait judicieux de considérer le support

$$\{x_0 = \frac{5}{14} - \frac{\sqrt{106}}{42}, x_1 = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{106}}{42}\} \tag{7}$$

   Comment doit-on alors calculer W_0 et W_1 (on ne demande pas de faire le calcul explicite)?