

Table des matières

I Courbes et surfaces : Géométrie & CAO	17
1 Courbes du plan et de l'espace	21
1.1 Courbes paramétrées	22
1.1.1 Premiers exemples et étude locale	22
1.1.2 Courbes équivalentes et paramétrisation par longueur d'arc	31
1.1.3 Repère mobile	38
1.1.4 Courbure et torsion : détermination pratique	47
1.2 Courbes de Bézier	50
1.2.1 La construction de De Casteljau (1959)	50
1.2.2 La construction via les polynômes de Bernstein	57
1.2.3 Splines	66
1.3 Exercices et sujets d'étude	76
1.3.1 Courbes paramétrées et longueur de courbes	76
1.3.2 Repère de Frenet, courbure et torsion	78
1.3.3 Courbes de Bézier	80
1.3.4 Courbes Splines	80
1.3.5 Courbure et torsion sous <i>Matlab</i>	83
1.3.6 Génération des fonctions B-splines et applications	84
1.3.7 La néphroïde de Huygens	86
1.3.8 Hélices sphériques	92
1.3.9 Interpolation et Splines, étude d'une application à l'industrie de la chaussure	96
2 Surfaces	101
2.1 Surfaces paramétrées	101
2.1.1 Nappes paramétrées	104
2.1.2 Plan tangent, direction normale, première et seconde forme fondamentales	113

2.1.3	Courbures	126
2.1.4	Surfaces réglées et surfaces développables	133
2.2	Surfaces de Bézier	134
2.2.1	Carreaux de Bézier	135
2.2.2	Triangles de Bézier	141
2.2.3	Courbure de Gauss d'une surface de Bézier	152
2.3	Exercices et sujets d'étude	155
2.3.1	Paramétrisation, plan tangent et longueur de courbe sur les surfaces	155
2.3.2	Seconde forme fondamentale et courbures	159
2.3.3	Surfaces de Bézier	160
2.3.4	Tracé d'une surface de Bézier à partir du réseau de contrôle	161
2.3.5	La pseudosphère	163
2.3.6	Surfaces développables	168
2.3.7	Surfaces de Bézier réglées	170
II	Espaces et transformations : Géométrie & Infographie	175
3	Actions de groupes et espaces affines	179
3.1	Groupes	179
3.1.1	Définitions et propriétés premières	179
3.1.2	Sous-groupes	180
3.1.3	Classes modulo un sous-groupe	180
3.1.4	Groupes opérant sur un ensemble	182
3.1.5	Isométries vectorielles de \mathcal{V}_2 et de \mathcal{V}_3	185
3.2	Espaces affines	191
3.2.1	Définitions, propriétés et notations	192
3.2.2	Géométrie cartésienne	193
3.3	Applications affines	197
3.3.1	Définitions, propriétés premières	197
3.3.2	Applications affines et barycentres	200
3.4	Isométries affines	202
3.4.1	Généralités	202
3.4.2	Exemples génériques	205
3.4.3	Classification des isométries : principe général	208
3.4.4	Exemple : classification des isométries du plan	209
3.5	La pertinence de l'algèbre	212

3.5.1	Classification des coniques du plan	213
3.5.2	Le corps des quaternions	217
3.6	Exercices et sujets d'étude	229
3.6.1	Produits scalaires sur \mathbb{R}^2 - utilisation en image	229
3.6.2	Isométries affines de l'espace	230
3.6.3	Classification des quadriques	232
3.6.4	Preuve « logicielle » de l'associativité des quaternions	235
3.6.5	Un cas de stratégie de jeu traité géométriquement	236
3.6.6	Les fractions continues et le nombre π	238
3.6.7	Génération de motifs sous le groupe diédral D_8	240
3.6.8	Bibliothèque logicielle pour les quaternions	246
3.6.9	Interpolation sur quaternions	247
4	Espaces projectifs	253
4.1	Espaces projectifs	254
4.1.1	Définitions premières	254
4.1.2	Sous-espaces projectifs	257
4.1.3	Coordonnées homogènes et repères d'un espace projectif	259
4.1.4	Groupe projectif	261
4.1.5	Courbes et surfaces de l'espace projectif	263
4.2	Matrices projectives : généralités et utilisation en image	269
4.2.1	Plongements de l'espace, du plan et de leurs directions	269
4.2.2	Matrices projectives des transformations de l'espace : généralités	271
4.3	Matrices projectives des applications affines de \mathcal{E}	275
4.3.1	Une méthode de détermination exhaustive	275
4.3.2	Exemples génériques	279
4.3.3	Bilan	281
4.4	Matrices projectives des projections de l'espace	283
4.4.1	Tableau synoptique des projections planes	284
4.4.2	Projections parallèles	285
4.4.3	Projections perspectives ou centrales	291
4.5	Exercices et sujets d'étude	301
4.5.1	Relation entre droite affine et droite projective	301
4.5.2	Courbes de Bézier rationnelles	301
4.5.3	Outils pour visualisation des projections centrales	303
4.5.4	Matrices projectives des isométries du plan affine (aspect direct et réciproque)	304

4.5.5	Birapport de quatre points d'une droite projective	305
4.5.6	Connaître les isométries vectorielles de \mathcal{V}_3 : bilan de l'existant et une méthode complémentaire pour faciliter la détermination des matrices projectives	307
4.5.7	Détermination des matrices projectives des isométries de l'espace affine (aspect direct et réciproque)	312
4.5.8	Le théorème des trois points	313
III	Corrections	317
1	Courbes du plan et de l'espace	319
1.1	Courbes paramétrées	319
1.2	Courbes de Bézier	322
1.3	Exercices et sujets d'étude	325
1.3.1	Courbes paramétrées et longueur de courbes	325
1.3.2	Repère de Frenet, courbure et torsion	328
1.3.3	Courbes de Bézier	332
1.3.4	Courbes Splines	333
1.3.5	Courbure et torsion sous <i>Matlab</i>	336
1.3.6	Génération des fonctions B-splines et applications	336
1.3.7	La néphroïde de Huygens	336
1.3.8	Hélices sphériques	338
1.3.9	Interpolation et splines, étude d'une application à l'industrie de la chaussure	347
2	Surfaces	351
2.1	Surfaces paramétrées	351
2.2	Surfaces de Bézier	357
2.3	Exercices et sujets d'étude	361
2.3.1	Paramétrisation, plan tangent et longueur de courbe sur les surfaces	361
2.3.2	Seconde forme fondamentale et courbures	364
2.3.3	Surfaces de Bézier	366
2.3.4	Tracé d'une surface de Bézier à partir du réseau de contrôle	368
2.3.5	La pseudosphère	368
2.3.6	Surfaces développables	371
2.3.7	Surfaces de Bézier réglées	372

3 Actions de groupes et espaces affines	375
3.1 Groupes	375
3.2 Espaces affines	378
3.3 Applications affines	378
3.4 Isométries affines	379
3.5 La pertinence de l'algèbre	379
3.6 Exercices et sujets d'étude	381
3.6.1 Produit scalaire dans \mathbb{R}^2 - utilisation en image	381
3.6.2 Isométries affines de l'espace	382
3.6.3 Classification des quadriques	385
3.6.4 Preuve « logicielle » de l'associativité des quaternions	386
3.6.5 Un cas de stratégie de jeu traité géométriquement	386
3.6.6 Les fractions continues et le nombre π	387
3.6.7 Génération de motifs sous le groupe diédral D_8	389
3.6.8 Bibliothèque logicielle pour les quaternions	389
3.6.9 Interpolation sur quaternions	390
4 Espaces projectifs	393
4.1 Espaces projectifs	393
4.2 Matrices projectives : généralités et utilisation en image	395
4.3 Matrices projectives des applications affines de \mathcal{E}	396
4.4 Matrices projectives des projections de l'espace	400
4.5 Exercices et sujets d'étude	405
4.5.1 Relation entre droite affine et droite projective	405
4.5.2 Courbes de Bézier rationnelles	406
4.5.3 Outils pour visualisation des projections centrales	407
4.5.4 Matrices projectives des isométries du plan affine (aspect direct et réciproque)	407
4.5.5 Birapport de quatre points d'une droite projective	408
4.5.6 Connaître les isométries vectorielles de \mathcal{V}_3 : bilan de l'existant et une méthode complémentaire pour faciliter la détermination des matrices projectives	411
4.5.7 Détermination des matrices projectives des isométries de l'espace affine (aspect direct et réciproque)	413
4.5.8 Le théorème des trois points	415

IV Annexes	419
A Étude d'une courbe paramétrée	421
A.1 Périodicité, symétrie	422
A.2 Étude des variations	422
A.3 Étude locale	423
A.3.1 Points spécifiques	423
A.3.2 Branches asymptotiques	424
A.4 Tracé de Γ	425
B Rappels sur les fonctions de plusieurs variables	427
B.1 Continuité des fonctions de plusieurs variables	428
B.2 Différentiabilité des fonctions de plusieurs variables	429
B.3 Calcul intégral pour les fonctions de plusieurs variables	432
B.3.1 Calcul d'intégrales doubles	432
B.3.2 Calculs d'intégrales triples	433
C Barycentres et convexes du plan et de l'espace	435
C.1 Barycentres	435
C.2 Convexes	437
D Espaces vectoriels euclidiens	439
D.1 Définitions - Propriétés premières	439
D.1.1 Espaces vectoriels : rappels	439
D.1.2 Espaces vectoriels euclidiens	440
D.1.3 Vecteurs orthogonaux	442
D.1.4 Vecteurs orthonormés	442
D.1.5 Sous-espaces orthogonaux	443
D.2 Groupe orthogonal	444
D.2.1 Opérateurs orthogonaux	444
D.2.2 Groupe orthogonal	444
D.2.3 Matrices orthogonales	445
D.2.4 Exemples importants d'isométries vectorielles directes et indirectes	446
D.2.5 Orientation de \mathcal{V}_2 et \mathcal{V}_3	446
D.3 Produit mixte et vectoriel dans \mathcal{V}_3	447
D.3.1 Produit mixte	447
D.3.2 Produit vectoriel	448
D.3.3 Produit vectoriel et mixte dans \mathcal{V}_3	449

D.4	Dérivées, produit scalaire, produit vectoriel	450
E	Géométrie cartésienne pour l'infographie	451
E.1	Droites affines du plan	451
	E.1.1 Définitions d'une droite affine	451
	E.1.2 Demi-droites, segments	453
	E.1.3 Zonage du plan	454
	E.1.4 Parallélisme, orthogonalité, intersections de droites	454
	E.1.5 Distance d'un point à une droite donnée par une équation cartésienne	455
E.2	Droites affines dans l'espace \mathcal{E}	455
	E.2.1 Remarques générales	455
	E.2.2 Un résultat important : distance de deux droites de l'espace	455
E.3	Plans affines de l'espace \mathcal{E}	457
	E.3.1 Définitions d'un plan	457
	E.3.2 « Dessus d'un plan », triangles, facettes orientées	459
	E.3.3 Zonage de l'espace	460
	E.3.4 Parallélisme, orthogonalité, intersections de plans	461
	E.3.5 Distance d'un point à un plan donné par une équation cartésienne	461
	E.3.6 À titre d'exemple : problème de réflexion de rayons (loi de Descartes)	461
E.4	Cercles et sphères	463
	E.4.1 Donnée par centre et rayon	463
	E.4.2 Donnée par un diamètre	463
	E.4.3 Savoir-faire classiques attendus	463
E.5	Complément : systèmes d'équations linéaires	466
Bibliographie		469
Index		477